Concursul Fractal

A Patra Ediție, 8 februarie 2025

Problema 1. Există oare trei numere naturale distincte două câte două a, b și c astfel încât numerele $a+b$, $b+c$ și $c+a$ să fie prime?

Soluție: Răspunsul este nu, deoarece dacă am avea două numere pare, suma lor ar fi un număr par, și dacă am avea două numere impare, suma lor, la fel va fi pară. Deci avem un număr prim par, unicul număr de acest fel fiind 2. Și unicele numere naturale cu suma doi sunt 1 și 1 care sunt egale.
Notă: Dacă elevul consideră că numerele naturale conțin 0, răspunsul este da, și dacă este dat exemplul 0, 2, 3, aceasta se consideră o soluție corectă.

Problema 2. Într-un rând sunt scrise numerele naturale de la 1 la 100. La fiecare operație, Viorel poate șterge două numere a și b de pe tablă și scrie numărul $a + b + 1$ în loc. După 99 de operații, pe tablă a rămas un singur număr. Ce număr este acesta?

Soluție: Răspunsul este 5149. Este clar că după fiecare operație, suma tuturor numerelor de pe tablă crește cu exact 1, deci după 99 de operații suma este egală cu suma numerelor de la 1 la 100 plus încă 99. Astfel, cum suma primelor 100 numere conform sumei Gauss este 5050, suma finală este egală cu 5050+99=5149.

Problema 3. O tablă de șah de 5×5 pătrățele are pătrățelul din centru ocupat, adică nicio figură nu poate merge acolo. Alexandru și Marius joacă un joc. Alexandru are regele în colțul din stânga-sus al tablei, iar Marius, în colțul din dreapta-jos. Pe rând, începând cu Alexandru aceștia își mută fiecare propriii regi pe un pătrățel ce nu a fost vizitat anterior de vreunul din jucători și astfel încât cei doi regi nu se află pe pătrățele vecine. Pierde cel ce nu poate face o astfel de mutare când ajunge rândul său. Cine pierde?.

Soluție: Este clar că Marius poate merge astfel încât poziția regelui său este simetrică față de centru cu poziția regelui lui Alexandru. După astfel de secvență de mutări, cei doi regi nu se intersectează, căci pătrățelul din mijloc e blocat, astfel cum nu ar merge Alexandru, Marius poate merge astfel încât să nu piardă, deci el câștigă.

Problema 4. Notăm cu S_n suma primelor n numere naturale. Arătați că există 10 numere naturale distincte $a_1, a_2 \dots a_{10}$ astfel încât pentru orice două numere a_i și a_j dintre acestea, sau S_{a_i} divide S_{a_j}, sau S_{a_j} divide S_{a_i}. Un exemplu de set de 3 numere care satisface condiția este $a_1 = 1$, $a_2 = 2$, $a_3 = 3$.

Soluție: Vom construi setul în felul următor. Fie primul element 1, al doilea, 2, apoi fiecare următorul elementu este produsul elementului precedent cu numărul cu 1 mai mare decât el, de exemplu după 2 urmează 6, după 6, 42 și așa mai departe. Și e clar datorită formulei sumei lui Gauss că $S_x = a(a+1)/2$ divide divide $S_{x+1} = a(a+1)(a(a+1)+1)/2$.